

1 基本的な計算問題です。

(1) 計算の順序が正しく行えるかを見る問題です。答えは1です。

(2) 逆算の問題です。答えは $2\frac{1}{2}$ です。

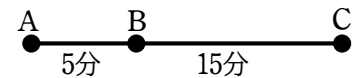
2 小問集合です。

(1) 整数 (2) 仕事算 (3) 差集め算 (4) 平面図形(角度) の問題です。

各問いの答えは, (1) 31 (2) 16日間 (3) 64個 (4) 38度 です。

3 [I] 速さに関する問題です。

(1) 花子さんがQ町を出発したバスと出会った地点をA,
そのとき, Q町を出発した次のバスがいる地点をCとします。



15分後に花子さんとC地点にいたバスが出会う場所をBとすると

AB間を花子さんは $9 \times \frac{15}{60} = \frac{9}{4}$ km 進んでいます。同じ道のをC地点にいたバスは5分で進むので

$$\frac{9}{4} \div \frac{5}{60} = 27 \text{ よりバスの速さは時速 } 27 \text{ km になります。}$$

次に, P地点をバスと同時に出発した花子さんは, 20分で $9 \times \frac{20}{60} = 3$ km 進んでいるので,

P町を出発する次のバスが花子さんに追いつくのにかかる時間は $3 \div (27 - 9) = \frac{1}{6}$ (時間)=10(分)です。

よって, 花子さんがP町を出発してから 次のバスは $20 + 10 = 30$ より, 30分後に追いつきます。

(2) P町を出発したバスと同時に着るので, 30分の倍数になります。Q町を出発したバスと8回すれ違うので
 $7 \times 15 = 105$ 分よりは長く, $9 \times 15 = 135$ 分よりは短い時間になります。この条件を満たす時間は120分です。

よって, 花子さんは120分後にQ町に着るので, P町とQ町の道のは $9 \times \frac{120}{60} = 18$ km になります。

[II] 平面図形と立体図形の問題です。

(1) 長方形ABFEを点Fを中心に90度右に転がした図を考えます。図1の斜線部分が求める面積になります。

図2の斜線部分は面積が等しいので, 図3の斜線部分の面積を求めればよいことになります。

よって, 求める面積は

$$10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{1}{4} - 6 \times 6 \times 3.14 \times \frac{1}{4} = (100 - 36) \times 3.14 \times \frac{1}{4} = 50.24 \text{ cm}^2 \text{ です。}$$

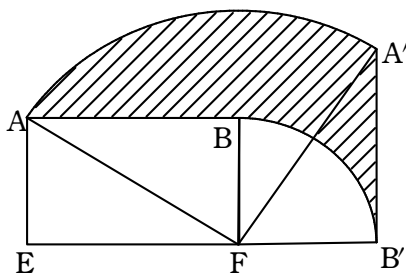


図1

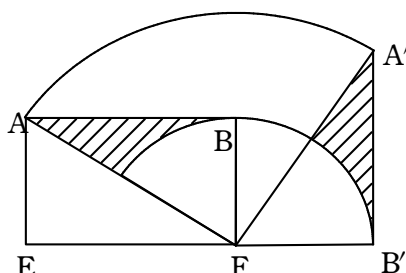


図2

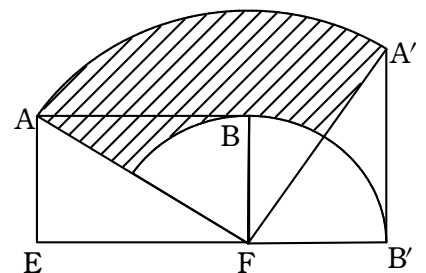


図3

(2) 求める立体の高さはBFと同じ6cmなので、底面積について、
 立体を真上から見た図を考えます。BFを軸に360°回転したときに
 できる図形は、対角線ACの真ん中の点をHとすると、
 半径がABの円から半径がHBの円を取り除いた図形(図4)になります。

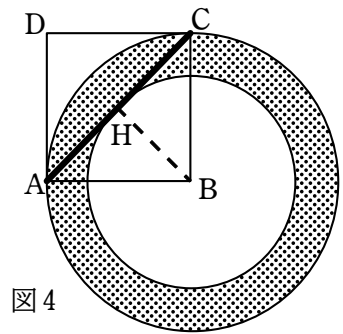


図4

ここで半径がHBの円の面積は、 $HB \times HB \times 3.14 \text{ cm}^2$ になるので
 $HB \times HB$ の値を求めます。

図5の正方形ABCDの面積の関係から $AC \times BD \div 2 = 8 \times 8$

$AC = BD = 2 \times HB$ なので $4 \times HB \times HB \div 2 = 64$

よって $HB \times HB = 32$ です。

以上より、図の斜線部分の面積は $8 \times 8 \times 3.14 - 32 \times 3.14 = 100.48$ なので、

求める立体の体積は $100.48 \times 6 = 602.88 \text{ cm}^3$ になります。

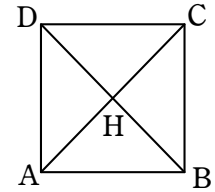


図5

4 規則性と整数の問題です。

(1) すべての明かりがつくのは2, 3, 4, 5, 6の最小公倍数60回するときです。

また、60回までにすべての明かりが消えるのは2, 3, 4, 5, 6の倍数をすべて除いた回数になります。

順に 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59の16回です。

(2) ここで、三角形ABCを $\triangle ABC$ のように表すことにします。正五角形の辺2本と対角線でできる三角形は、
 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ の5種類です。3つの頂点の明かりが同時につくのは、
 明かりがつく回数の公倍数のときになるので、そのとき他の明かりがつくか調べます。

① $\triangle ABC$ 6, 5, 4の最小公倍数は60なので、D, Eもつくので条件に合いません。

② $\triangle BCD$ 5, 4, 3の最小公倍数は60なので、A, Eもつくので条件に合いません。

③ $\triangle CDE$ 4, 3, 2の最小公倍数は12なので、12の倍数のとき、Aもつくので条件に合いません。

④ $\triangle DEA$ 3, 2, 6の最小公倍数は6なので、6の倍数のうち、Bがつく5の倍数とCがつく4の倍数のときを除くと
 6, 18, 42, 54の4回つきます。

⑤ $\triangle EAB$ 2, 6, 5の最小公倍数は30なので、Dもつくので条件に合いません。

以上より 条件を満たすのは4回です。

(3) (2)の図で考えると、正五角形の頂点を結んでできる二等辺三角形は、五角形の辺2本と対角線1本でできる

(2)の三角形5種類と正五角形の辺1本と対角線2本でできる $\triangle ACD$, $\triangle BDE$, $\triangle CEA$, $\triangle DAB$, $\triangle EBC$ の5種類の
 合計10種類になります。この10種類について、頂点EをBに変えると

① $\triangle ABC$ (2)より条件に合いません。

② $\triangle BCD$ (2)より条件に合いません。

③ $\triangle CDE \rightarrow \triangle CDB$ ②と同じ。条件に合いません。

④ $\triangle DEA \rightarrow \triangle DBA$ 3, 5, 6の最小公倍数は30なので、もうひとつのBもつくので条件に合いません。

⑤ $\triangle EAB \rightarrow \triangle ABB$ 6, 5の最小公倍数は30なのでDもつくので条件に合いません。

⑥ $\triangle ACD$ 6, 4, 3の最小公倍数は12なので、12, 24, 36, 48の4回。

⑦ $\triangle BDE \rightarrow \triangle BDB$ 5, 3の最小公倍数は15なので, Aがつく6の倍数を除くと15, 45の2回

⑧ $\triangle CEA \rightarrow \triangle CBA$ ①と同じ。条件に合いません。

⑨ $\triangle DAB$ ④と同じ。条件に合いません。

⑩ $\triangle EBC \rightarrow \triangle BBC$ 5, 4の最小公倍数は20なので, 20, 40の2回

①~⑩より 答えは8回です。

5 立体図形の体積の問題です。

(1) 切り落とした三角すいの体積は $(4 \times 4 \div 2) \times 4 \div 3 \times 8 = \frac{256}{3} \text{ cm}^3$ になるので,

立体②の体積は, $12 \times 12 \times 12 - \frac{256}{3} = 1728 - \frac{256}{3} = \frac{4928}{3} \text{ cm}^3$ です。

よって, 立体②の体積は立体①の体積の $\frac{4928}{3} \div 1728 = \frac{77}{81}$ 倍になります。

(2) 右の図1のように, 切り口の図形は五角形(赤い線)になります。

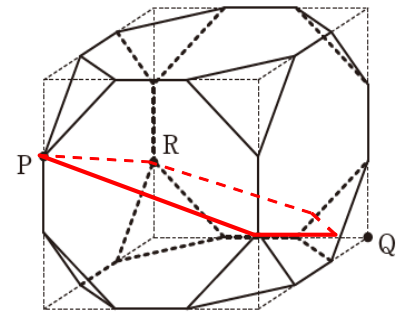


図1

(3) 点Pを通る底面に平行な面(図2の青い線)で立方体①を切り, 高さが8 cmの直方体を考えると, 3点P, Q, Rを通る平面はこの直方体を2等分します。この2等分された立体から各辺を3等分した点を通る平面で切り取られた三角すいを3個と点Qを含む三角すいの一部を引いたものが求める立体の体積です。各辺を3等分した点を通る平面で切ったときにできる三角すい1個の体積は $(4 \times 4 \div 2) \times 4 \div 3 = \frac{32}{3} \text{ cm}^3$ です。

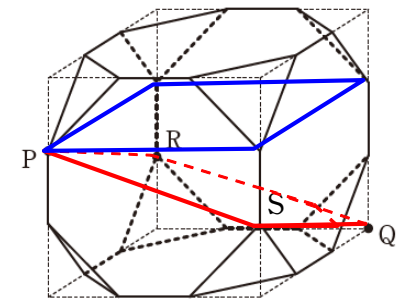


図2

次に, 点Qを含む三角すいの一部の立体(立体Mとします)について考えます。

立体を右側から見たものが図3です。図のように点A, B, Cをとると $AB:BC=1:3$ となります。

よって, $\triangle BCQ$ の面積は $4 \times 4 \div 2 \times \frac{3}{4} = 6 \text{ cm}^2$ です。

また, 図4より $\triangle BCQ$ を底面としてみると赤い線で分けられる上側の三角すいの高さ(図4の青線)は $4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ cm}$ になるので

図4の左下(立体M)の体積は $\frac{32}{3} - 6 \times 3 \div 3 = \frac{14}{3} \text{ cm}^3$ です。

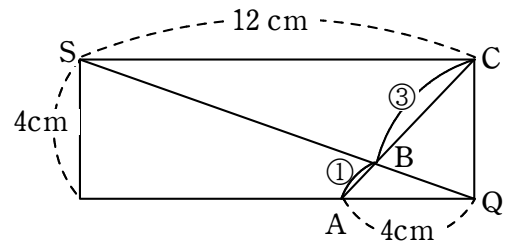


図3

以上から, 求める立体の体積は

$$12 \times 12 \times 8 \div 2 - \frac{32}{3} \times 3 - \frac{14}{3} = \frac{1618}{3} = 539\frac{1}{3} \text{ cm}^3 \text{ です。}$$

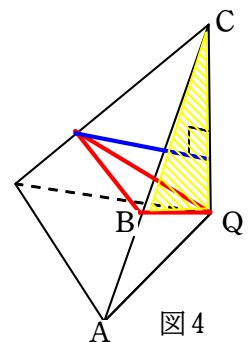


図4